* 037

Sulla scala a ritmo di Log //

G.W. Leibniz e i “numeri dei rapporti”

Nicola Chiriano

Docente al Liceo scientifico “L. Siciliani” di Catanzaro

SIAMO ALLA TERZA PUNTATA DEL VIAGGIO TRA MUSICA E MATEMATICA. DOPO LA SCALA NATURALE E LA SCALA EQUABILE L'AUTORE CI INTRODUCE ALL'USO DEI LOGARITMI. >>>>>>>>>>>>>>>>>>>

[LA TAVOLA DEI LOGARITMI]

[NICOLA CHIRIANO]
Nicola Chiriano è docente di Matematica e Fisica al Liceo scientifico "Siciliani" di Catanzaro. Si occupa di didattica e ICT; è formatore in diversi corsi per docenti e studenti di vari ordini di scuola. Ha all'attivo diverse collaborazioni con Ansas (e-tutor corsi Pon Tec) e Invalsi (piano di formazione Ocse-Pisa). È appassionato di matematica della musica e di musica della matematica.

[PREMESSA]

Siamo giunti alla terza tappa del nostro viaggio tra note e numeri. Il cammino percorso finora si può così schematizzare:

Pitagora, Zarlino	scala naturale	da **N** a **Q**
Aristosseno, Stevino	scala equabile	da **Q** ai radicali (irraz. algebrici)

In particolare nella puntata precedente abbiamo visto come, con l'introduzione di un rapporto (intervallo) di semitono pari a:

$$k = \sqrt[12]{2}$$

la scala musicale risultasse perfettamente "restaurata", tale cioè da avere 12 "scalini" tutti della stessa ampiezza.

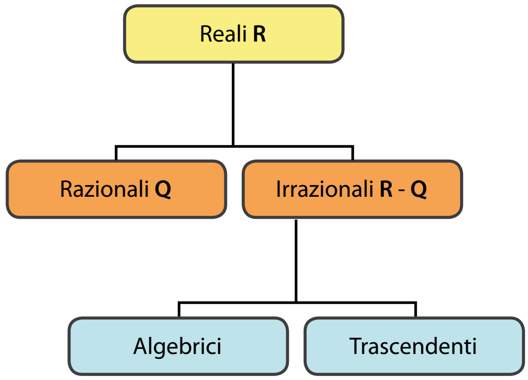
[PERCHÉ CI VUOLE ORECCHIO]

Abbiamo fin qui constatato come, per passare da una nota di data frequenza ad un'altra ad essa "compatibile", occorra *moltiplicare* per un determinato numero e non già *sommare*. Il perché questo succeda è stato scoperto grazie agli studi sul funzionamento del nostro apparato uditivo, a partire dalla *teoria posizionale* (1863) di **Hermann von Helmholtz**. È la struttura fisiologica del nostro orecchio a farci percepire le frequenze delle note in modo moltiplicativo invece che additivo, in modo che un intervallo musicale non venga determinato dalla *differenza* tra le frequenze dei suoni ma, come verificato sin dai tempi di Pitagora, dal loro *rapporto*. In modo equivalente possiamo dire che, mentre con le dita contiamo in *progressione aritmetica*, ossia aggiungendo 1 al numero precedente per ottenere il successivo, con l'orecchio contiamo invece in *progressione geometrica*: per ottenere una nota più alta, ma compatibile ad una data, occorre moltiplicarne la frequenza per un certo numero.

Aveva davvero ragione **G.W. Leibniz** quando scriveva a **C. Goldbach** (1712) che fare o ascoltare Musica significa, in modo "occulto" (oggi diremmo inconscio), fare Matematica:

"*Musica est exercitium arithmeticae occultum*
nescientis se numerare animi".

Questo è tanto più vero quanto, indagando su questa Matematica "occulta" della Musica, scopriamo di essere approdati in un nuovo insieme di numeri, quello degli ***irrazionali trascendenti***.



I numeri irrazionali, quelli che non sono cioè esprimibili in forma di frazione, si distinguono tra:

- *irrazionali algebrici* (ossia i radicali, come $\sqrt[12]{2}$) che sono soluzioni di equazioni polinomiali:

$$x^{12} - 2 = 0 \longrightarrow x = \sqrt[12]{2}$$

- *irrazionali trascendenti* (ossia non algebrici) come e, π e (tra gli infiniti altri) quelli previsti dal teorema di Lindemann-Weierstrass, delle forme

$$\sin a,\ \cos a,\ \tan a,\ e^a,\ \log a\ .$$

[LE RELAZIONI RIVELANO IL TEMPERAMENTO]

In Matematica c'è una funzione che trasforma i prodotti in somme e i rapporti in differenza: si tratta del **logaritmo**, introdotto nel 1614 da **John Napier** (Nepero) come strumento di semplificazione dei calcoli. Esso è definito come quell'unico numero reale x a cui occorre elevare una base a per ottenere un dato numero b:

$$a^x = b \overset{def}{\longleftrightarrow} x = \log_a b$$

dove: $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ \wedge \ b > 0\ .$

Si possono facilmente dimostrare le note proprietà:

$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ (log del prodotto)

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (log del rapporto)

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ (log della potenza)

$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ (cambio base) .

Il significato di logaritmo è quindi "*esponente*", ma questa non è la sua etimologia. Secondo alcuni, Nepero col termine *logaritmo*, composto da λόγος e 'αριθμός, voleva significare il "**numero della ragione**" intendendo quindi λόγος = ragione, nel senso del rapporto costante che caratterizza i termini di una progressione geometrica. Come ha evidenziato Mauro Cerasoli, citando Ennio Flaiano, in Grecia il *logaritmo* oggi non è altro che il "conto" che si chiede al ristorante ossia, invertendo l'ordine delle parole, un "**ragionamento sui numeri**" ossia un semplice "calcolo". Ai nostri scopi, va benissimo tradurre λόγος come *ratio* nel senso di divisione e quindi logaritmo come "**numero dei rapporti**" o, volendo proprio forzare, "**numero degli intervalli**".

Leibniz si convince dell'utilità pratica del temperamento equabile nel 1709, proprio dopo aver "*considerato ed esaminato per mezzo dei Logaritmi l'antica suddivisione dell'ottava in 12 parti uguali, che Aristosseno già seguiva, e avendo osservato quanto gli intervalli equalizzati che si ottengono in tal modo approssimano i più utili fra quelli della scala ordinaria*". Le relazioni fra le note musicali, usando i logaritmi, assumono in effetti una forma interessante. Per esempio, il rapporto di **ottava** tra due Do consecutivi:

$$\frac{Do_2}{Do_1} = 2$$

usando i logaritmi in base 2, diventa "unitario":

$$\log_2 \frac{Do_2}{Do_1} = \log_2 2 = 1 \ .$$

Significa che, pur se a frequenza doppia, le due note sono *equivalenti*. È quindi legittimo chiamarle con lo stesso nome.
Invece per il rapporto costante di **semitono** si ha:

$$\log_2 \sqrt[12]{2} = \frac{1}{12}$$

e quindi 12 semitoni fanno un'ottava:

$$12 \log_2 \sqrt[12]{2} = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1 = \log_2 2 \ .$$

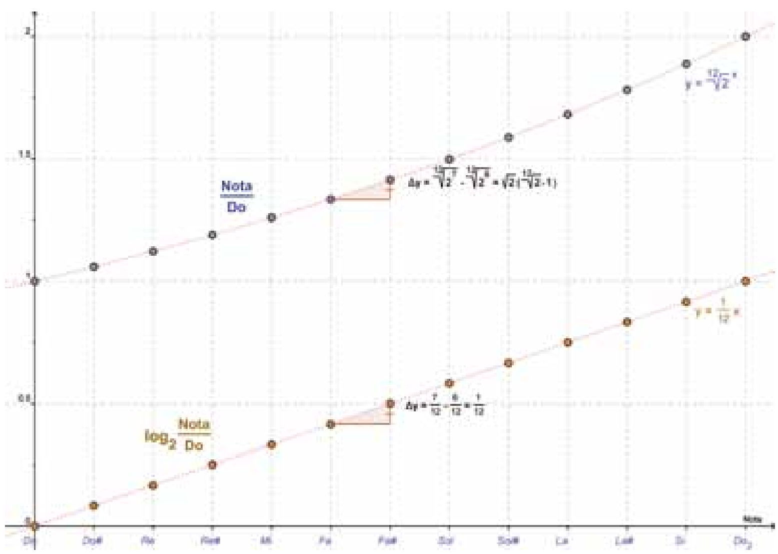
Gli intervalli uguali tra note si rivelano quindi essere in realtà intervalli uguali tra i logaritmi delle loro frequenze. Riportando graficamente una sequenza di note tra loro in rapporto costante, ossia in **progressione geometrica** di ragione $\sqrt[12]{2}$, otteniamo il grafico di una funzione esponenziale di equazione:

$$y = (\sqrt[12]{2})^x = 2^{x/12} \ .$$

Riportando invece i logaritmi di tali frequenze, la cui differenza è costante e pari a 1/12, che sono quindi in **progressione aritmetica**, otteniamo la retta di equazione:

$$y = \frac{1}{12} x \ .$$

Sopra: Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716).



Sopra: [Progressione geometrica dei rapporti tra note] VS [Progressione aritmetica dei loro logaritmi].

Usando i logaritmi, **Eulero** notò come sia possibile determinare quanti semitoni distino tra loro due note le cui frequenze abbiano un rapporto $R = N_2/N_1$:

$$(\sqrt[12]{2})^n = R \quad \longleftrightarrow \quad n = \log_{\sqrt[12]{2}} R = \frac{\log_2 R}{\log_2 \sqrt[12]{2}} = \frac{\log_2 R}{1/12}$$

e quindi $$\boxed{n = 12 \log_2 R}\ .$$

Se si usano note della scala equabile, si ha $n \in \mathbf{N}$ in quanto R è una potenza intera di $\sqrt[12]{2}$. Ad esempio, per la quinta equabile si ha:

$$R = \sqrt[12]{2^7} \quad \longrightarrow \quad n = 12 \log_2 R = 12 \cdot \frac{7}{12} = 7$$

e in effetti per andare dal Do al Sol su un pianoforte dobbiamo passare per 7 tasti, tra neri e bianchi: la tastiera di un pianoforte è cioè una scala logaritmica.
Il logaritmo (in base 2) di un intervallo musicale entro la scala equabile esprime quindi il **numero dei semitoni** di cui esso è composto. Ha quindi senso, come azzardato prima, tradurre *logaritmo* con "numero dei rapporti", degli intervalli, dei semitoni.

Anche la scala dell'*intensità sonora I* è una scala logaritmica (in base 10), relativa ad un valore di riferimento $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$. Si esprime in *decibel*:

$$I_{db} = 10 \log I/I_0\ .$$

[UNA NOTA DI POCHI CENTESIMI]

Se prendiamo note al di fuori della scala equabile, il loro rapporto $R = N_2/N_1$ non è più una potenza intera di $\sqrt[12]{2}$ e quindi $n \notin \mathbf{N}$.
Nel 1885 **Alexander Ells** modificò il calcolo di n in modo che ad un semitono equabile corrispondessero 100 *cent*, ossia 100 frequenze intere (e discrete!). In tal modo ad un'ottava corrispondono 1200 *cent*:

intervallo	rapporto	in *cent*
semit. eq.	$\sqrt[2]{2}$	100
tono eq.	$\sqrt[6]{2}$	200
quinta	$\sqrt[12]{2^7}$	700
ottava	2	1200

La "formula magica" per esprimere un qualsiasi intervallo (rapporto) $R = N_2/N_1$ tra due note in *cent* è:

$$\boxed{n = 1200 \log_2 R}\ .$$

I *cent* vengono usati soprattutto per esprimere le distanze tra note successive, ossia i toni e i semitoni. Per le proprietà dei logaritmi, tali distanze non risultano più espresse dai *rapporti* tra le frequenze ma dalle loro *differenze* in cent:

$$1200 \log_2 \frac{N_2}{N_1} = 1200\,(\log_2 N_2 - \log_2 N_1) = n_2 - n_1\ .$$

I valori in *cent* permettono un confronto tra le varie scale più diretto di quello, tra rapporti, riportato nel precedente articolo.

scala ▶	Pitagorica		Naturale		Equabile	
Nota	Nota/Do	cent	Nota/Do	cent	Nota/Do	cent
Do	1		1		1,00	
Re	9/8	204	9/8	204	1,12	200
Mi	81/64	408	5/4	386	1,26	400
Fa	4/3	498	4/3	498	1,33	500
Sol	3/2	702	3/2	702	1,50	700
La	27/16	906	5/3	884	1,68	900
Si	243/128	1110	15/8	1088	1,89	1100
Do_2	2	1200	2	1200	2,00	1200

Il metodo di Ells tiene conto delle differenze tra le note, discretizzando i valori ottenuti applicando i logaritmi ai rapporti fra di esse. È quindi più adatto alle dita che all'orecchio!
Essendo ormai... ormai approdati ai numeri reali, possiamo aspettarci che tra un Mi e un Fa ci siano ben più che 100 frequenze: i numeri trascendenti non possono che portarci... all'infinito e al continuo. Approfondiremo nella prossima puntata.

[RIFLESSIONE FINALE]

Abbiamo ridefinito i logaritmi come "*numeri dei rapporti*" i quali, associati a delle relazioni tra note musicali, intervengono nella descrizione dei vari temperamenti. Grazie ai logaritmi, quindi da un punto di vista *trascendente*, si scopre che un rapporto a 2 (come quello di ottava) è un rapporto unitario! Dai numeri abbiamo davvero molto da imparare, anche per le relazioni tra persone.

[BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA]

• N. Chiriano. Il restauro della Scala. Il "temperino" di J.S. Bach. *Alice & Bob* n. 16, febbraio 2010 • N. Chiriano. Pitagora e la Musica. *Alice & Bob* n. 15, dicembre 2009 • A. Frova. *Fisica nella Musica*. Zanichelli, Bologna 1999 • M. Cerasoli. Esempi di bufale nell'insegnamento della matematica. *Boll. Doc. Mat*. 39, 1999 • S. Isola. *Matematica e Musica*. Su www.unicam.it • W. Maraschini. *Sette note e infiniti numeri*. Su www.treccani.it • www.wikipedia.org. Portale Musica.

// :)