MATEMATICA E LIBERTÀ:
LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Silvia Benvenuti - Scuola di Scienze e Tecnologie - Università di Camerino

Urbino, 18 novembre 2016

Quello che ci hanno sempre insegnato …

Quello che ci hanno sempre insegnato …

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa

Quello che ci hanno sempre insegnato …

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste una e una sola parallela ad *r* passante per *P*

Quello che ci hanno sempre insegnato …

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste una e una sola parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Quello che ci hanno sempre insegnato …

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste una e una sola parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimenticHiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste una e una sola parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimenticheamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è minore del quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste una e una sola parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimenticLiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è maggiore del quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste una e una sola parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimentichiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è maggiore del quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, esiste più di una parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimenticiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è maggiore del quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, non esiste nessuna parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimentichiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è maggiore del quadrato costruito sull’ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, non esiste nessuna parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimentichiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è maggiore del quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, non esiste nessuna parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°

Dato un triangolo, è sempre possibile costruirne uno *simile* ma più grande (*omotetia*)

… dimentichiamolo per oggi!

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è maggiore del quadrato costruito sull'ipotenusa

Dati una retta *r* e un punto *P* fuori da essa, non esiste nessuna parallela ad *r* passante per *P*

La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°

Se due triangoli hanno gli stessi angoli interni, allora hanno la stessa area

racconti di fate

racconti di fate

geometrie da manicomio

racconti di fate

geometrie da manicomio

elucubrazioni deliranti di un professore universitario elevate al rango di nuove verità sovrumane, per merito della sua megalomania

racconti di fate

geometrie da manicomio

la geometria non euclidea non può procurare agli studenti altro che stanchezza, vuotezza, arroganza e stupidità

elucubrazioni deliranti di un professore universitario elevate al rango di nuove verità sovrumane, per merito della sua megalomania

racconti di fate

geometrie da manicomio

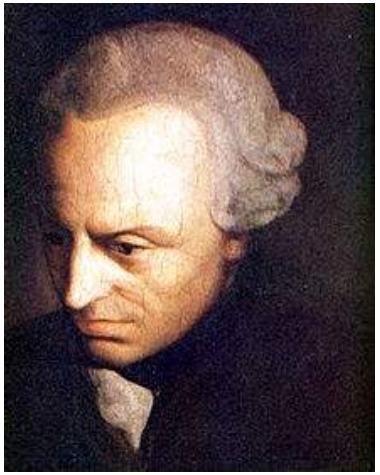
la geometria non euclidea non può procurare agli studenti altro che stanchezza, vuotezza, arroganza e stupidità

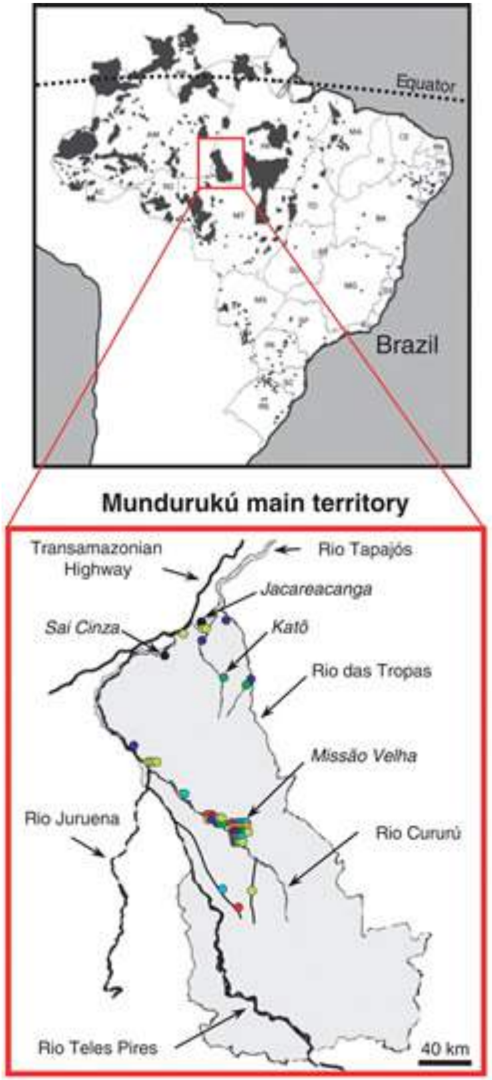
elucubrazioni deliranti di un professore universitario elevate al rango di nuove verità sovrumane, per merito della sua megalomania

i geometri non euclidei hanno una comprensione oscura e menti ingannevoli, e l'insegnamento della geometria non euclidea in università e scuole darebbe origine a una razza di studenti che potrebbe compromettere la società

Kant … e i Munduruku

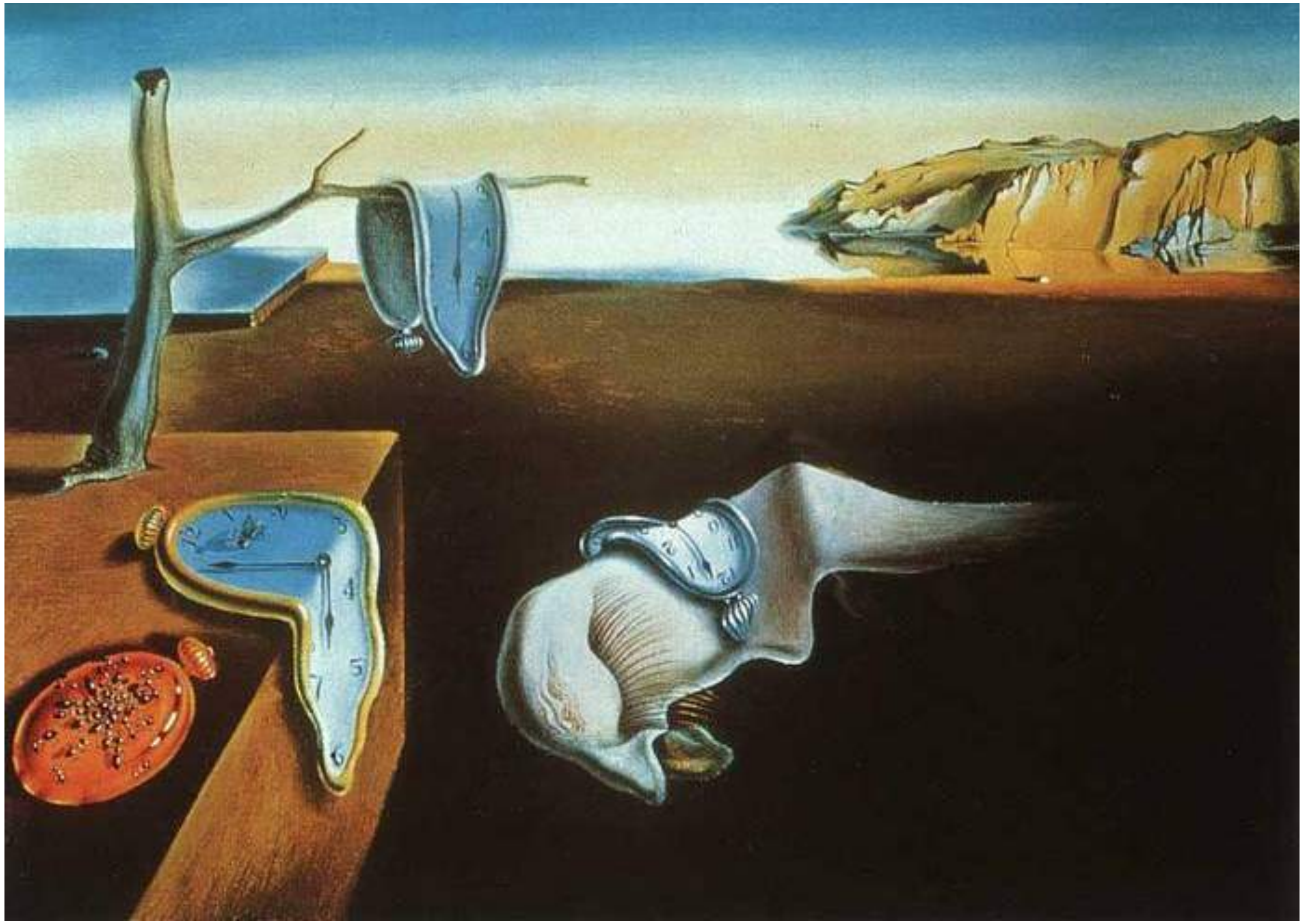
Immanuel Kant
(1724-1804)





La rivoluzione non euclidea: libertà!

La rivoluzione non euclidea: libertà!



Libertà: l'influenza sull'arte moderna

«se si desiderasse collegare lo spazio dei pittori a qualche geometria, bisognerebbe fare riferimento ai sapienti non euclidei, meditare su certi [loro] teoremi» *Du cubisme* (1912), A. Gleizes e J. Metzinger

«Lobačevskij ha fatto esplodere l'assolutismo di Euclide. Con Gauss e Riemann egli ha distrutto il rigido spazio euclideo. Tutti gli oggetti matematici che essi hanno stabilito sono inimmaginabili e inaccessibili alla sensazione. Lo schiudersi della nuova epoca, annunciata dalla costruzione di nuovi mondi matematici, portava con sé una tentazione, e gli artisti non hanno saputo resistere alla sua forza seduttrice. […] Noi abbiamo deciso di accettare come evidenti e necessarie le concezioni che i nostri predecessori hanno considerato come inconcepibili e che, in effetti, essi erano incapaci di concepire».
E. El Lissitzky (1830-1941)

«Un quadro è l'arte di far incontrare due linee, di cui si constata geometricamente il parallelismo, su una tela, davanti ai nostri occhi, nella realtà di un mondo trasfigurato che segua nuove condizioni e possibilità» T. Tzara (1896-1963)

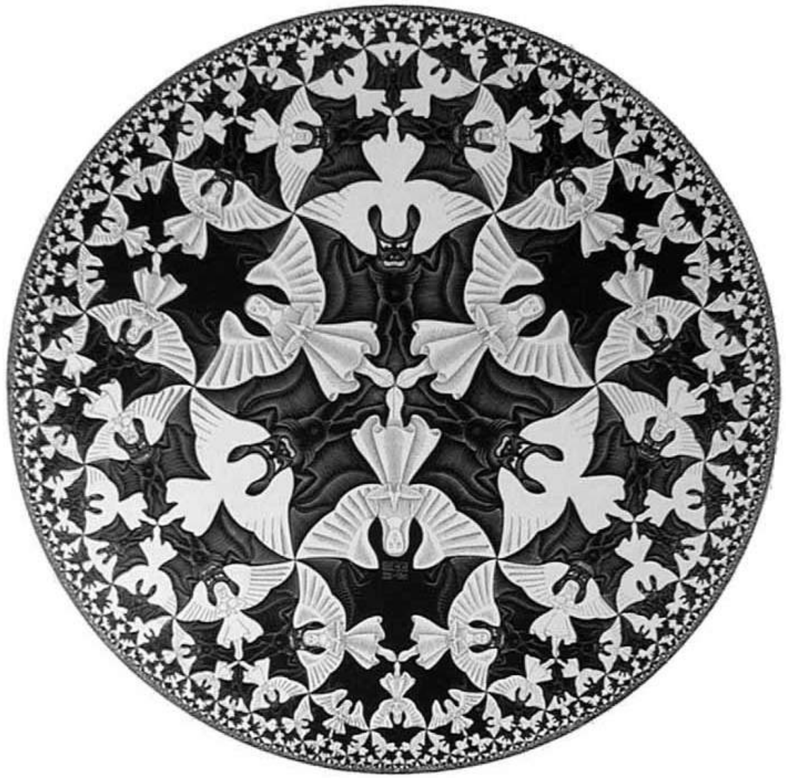
Pelham Grenville Wodehouse, Herbert George Wells, Oscar Wilde, Joseph Conrad, Ford Madox Ford, Marcel Proust, Gertrude Stein

Alexander Scriabin, Edgar Varèse, George Antheil

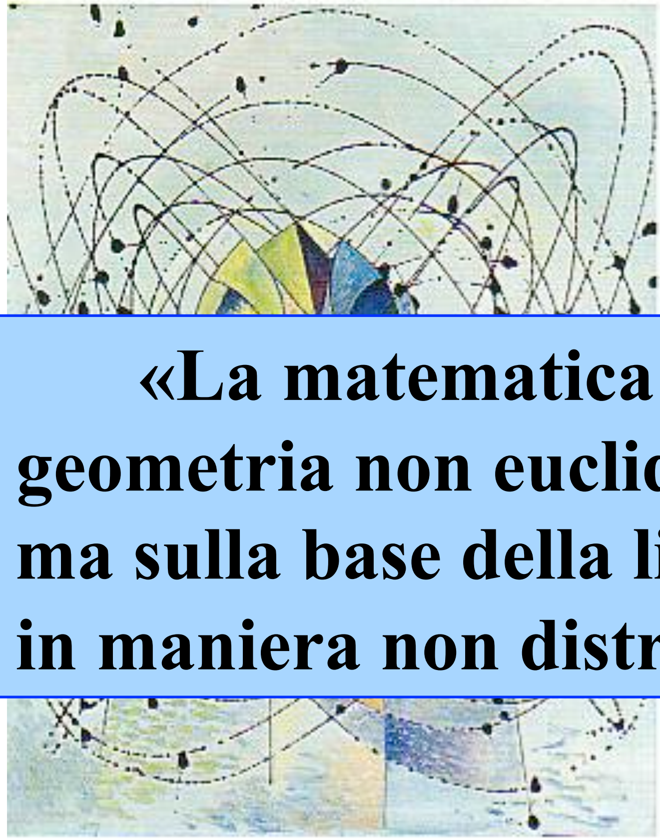
La rivoluzione non euclidea: libertà!

Ragazzo affascinato dal volo di una mosca non euclidea, Max Ernst (1942)

Cerchio limite IV, M. C. Escher (1969)



La rivoluzione non euclidea: libertà!



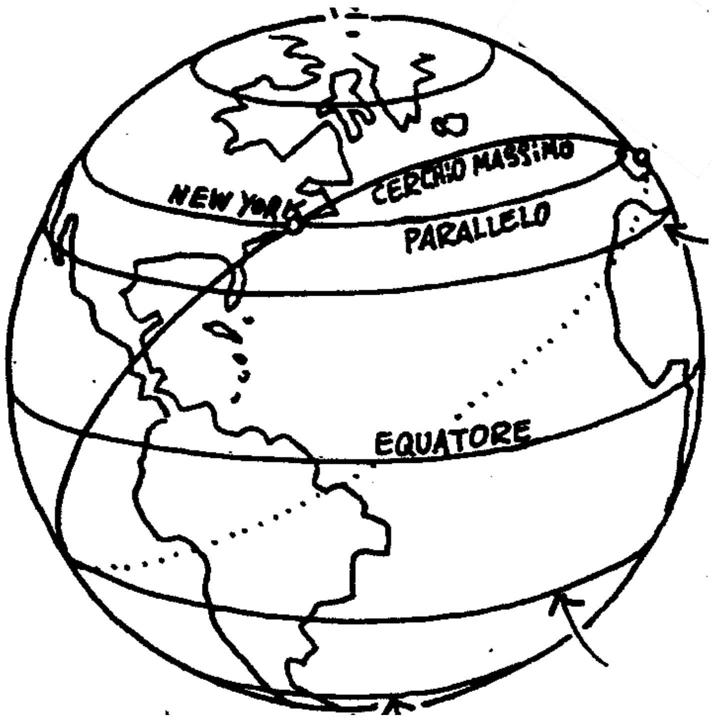
Ragazzo affascinato dal volo di una mosca non euclidea, Max Ernst (1942)

Cerchio limite IV, M. C. Escher (1969)

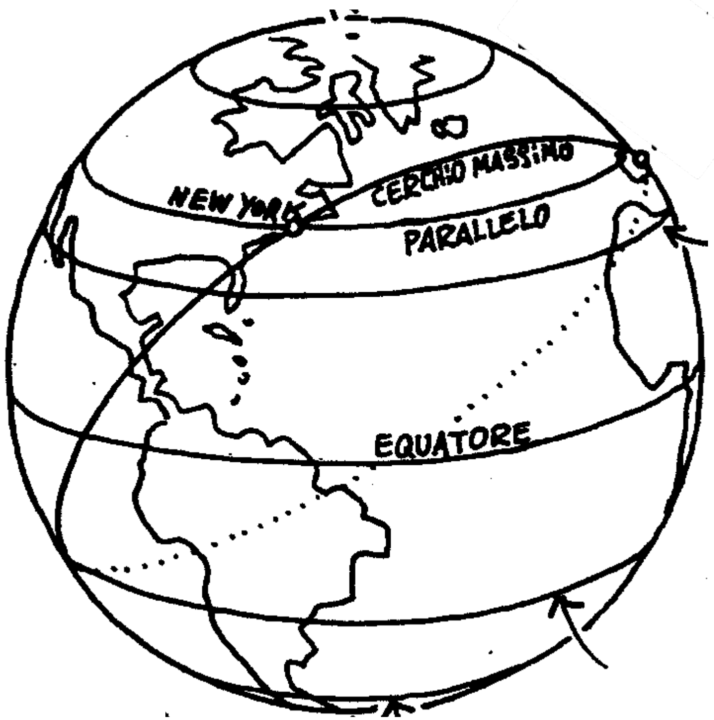
«La matematica è la scienza della *libertà*: la geometria non euclidea è nata non per misurazioni, ma sulla base della libera scelta umana di negare in maniera non distruttiva». *Imre Toth*

A pensarci bene …

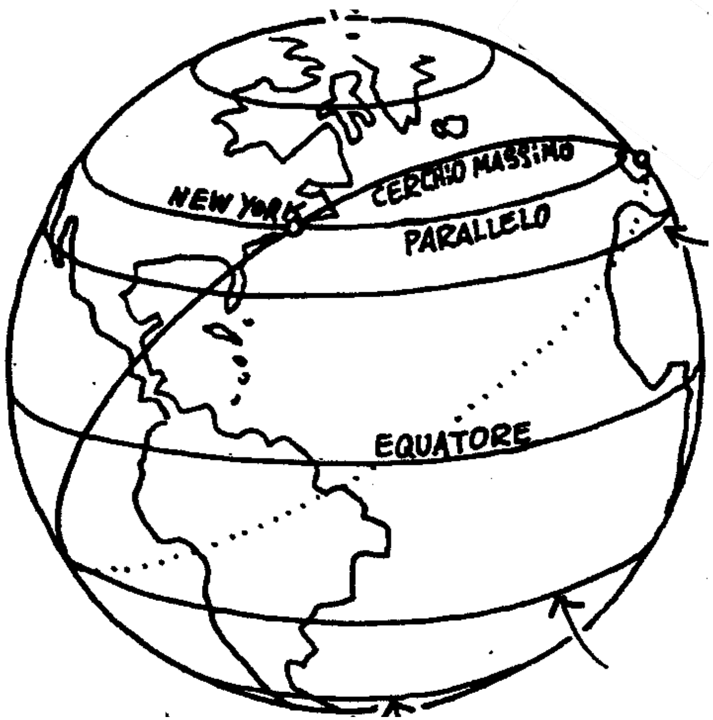
Geometria del mappamondo



Geometria del mappamondo

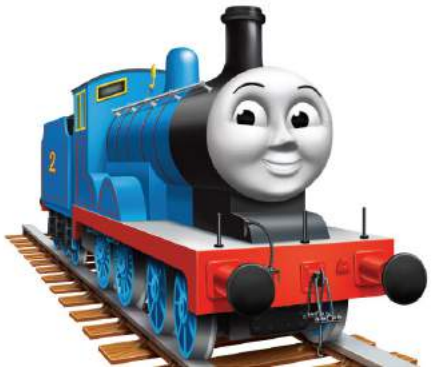


Geometria del mappamondo



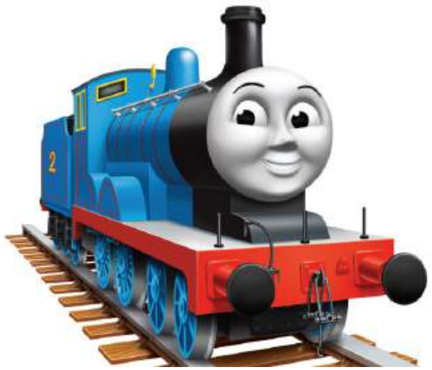
Cosa vuol dire
"andare a diritto"
sul mappamondo?!

Geometria del mappamondo



Cosa vuol dire
“andare a diritto”
sul mappamondo?!

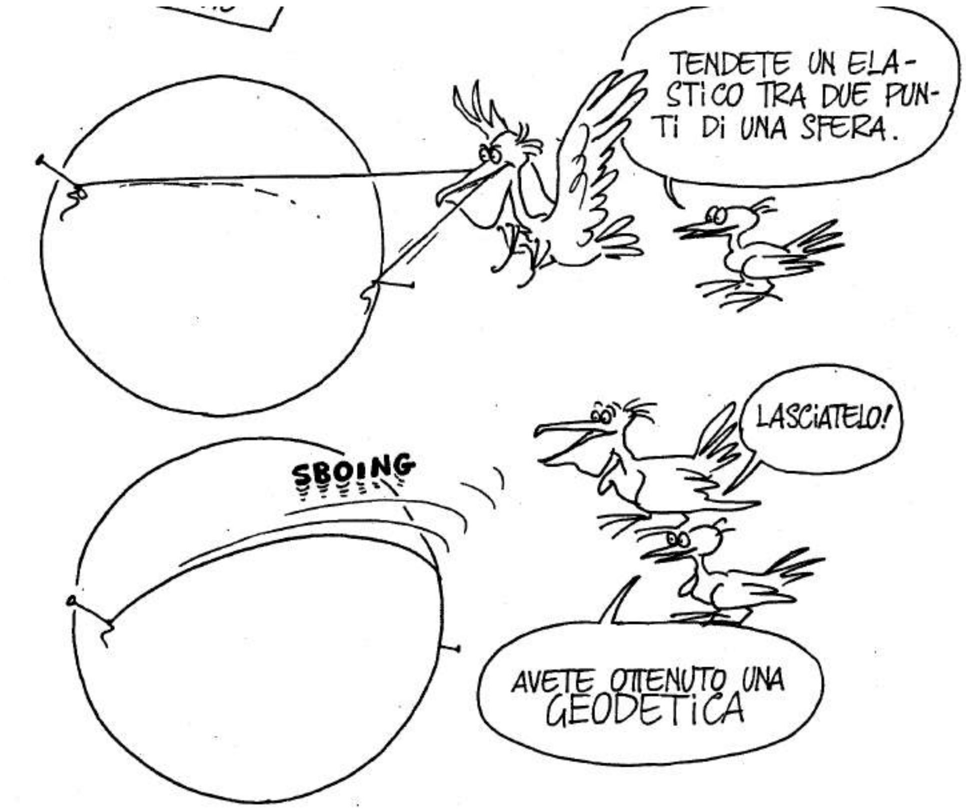
Geometria del mappamondo



Cosa vuol dire
"andare a diritto"
sul mappamondo?!

Segmento AB =
il più breve tra tutti i percorsi
che congiungono A e B

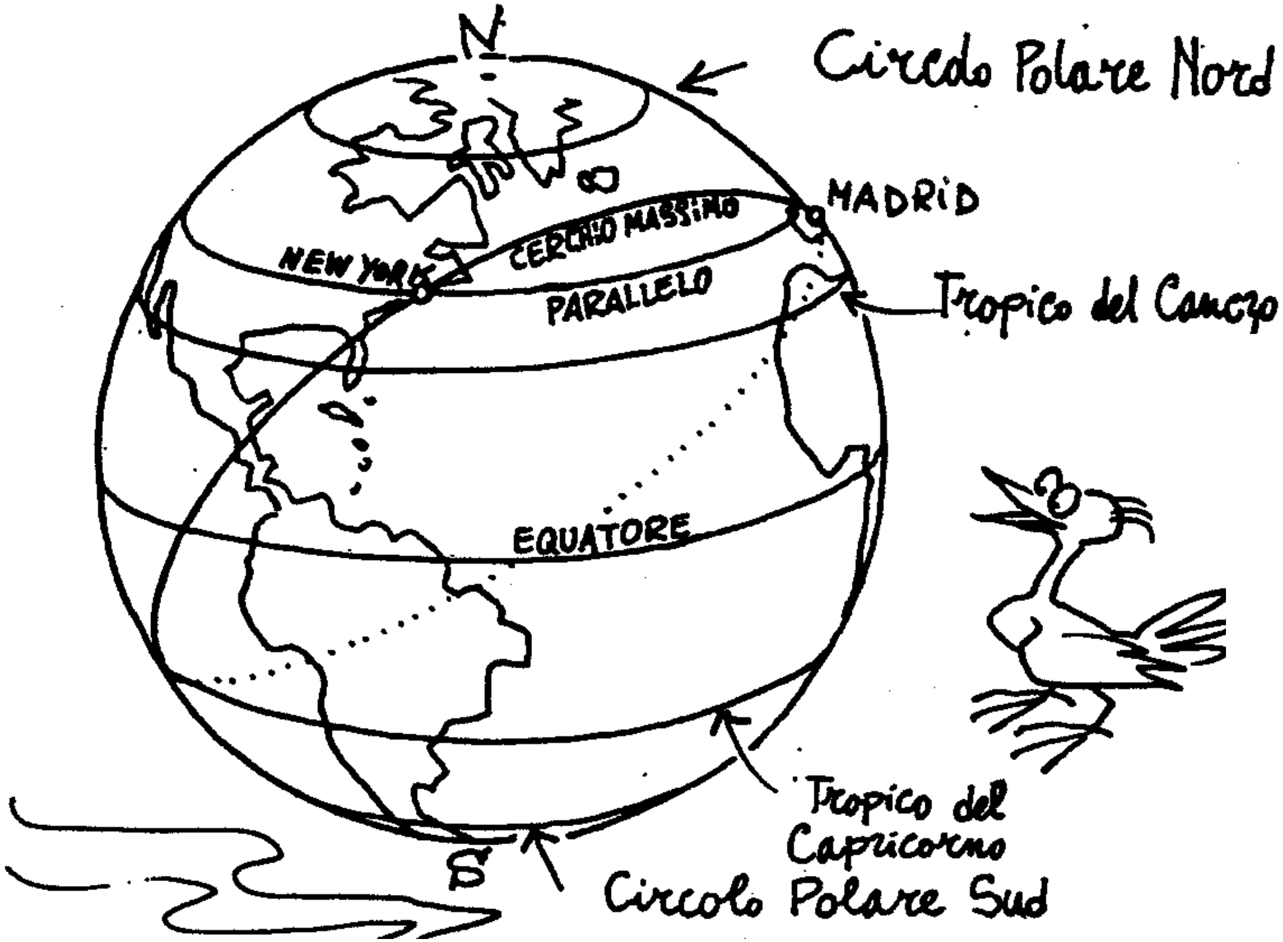
Geometria del mappamondo



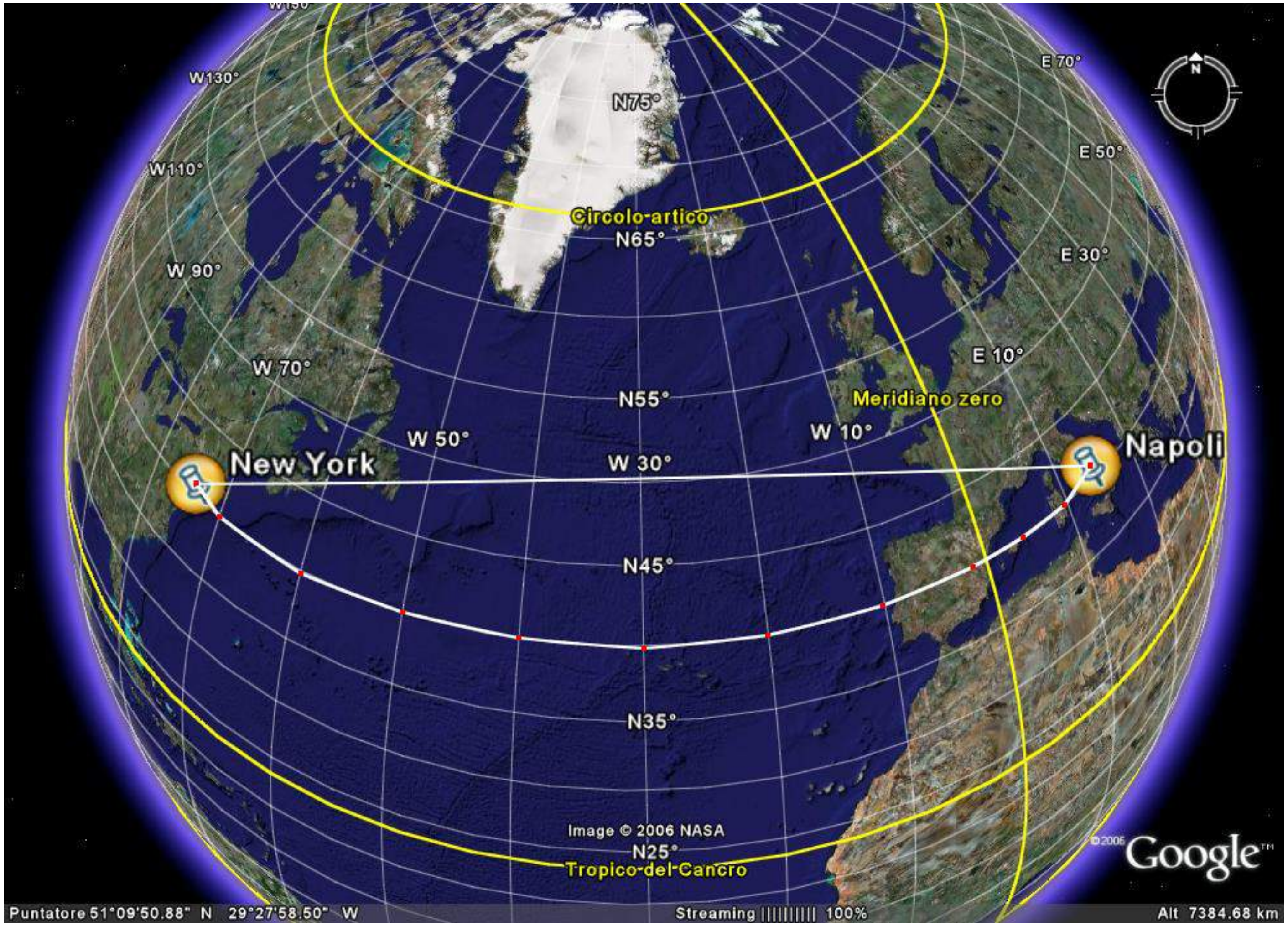
Cosa vuol dire
"andare a diritto"
sul mappamondo?!

Segmento AB =
il più breve tra tutti i percorsi
che congiungono A e B

Segmenti e rette del mappamondo

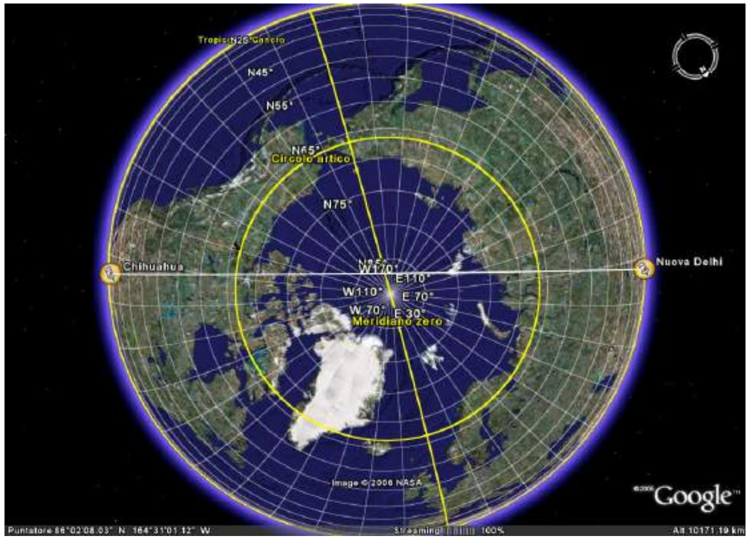


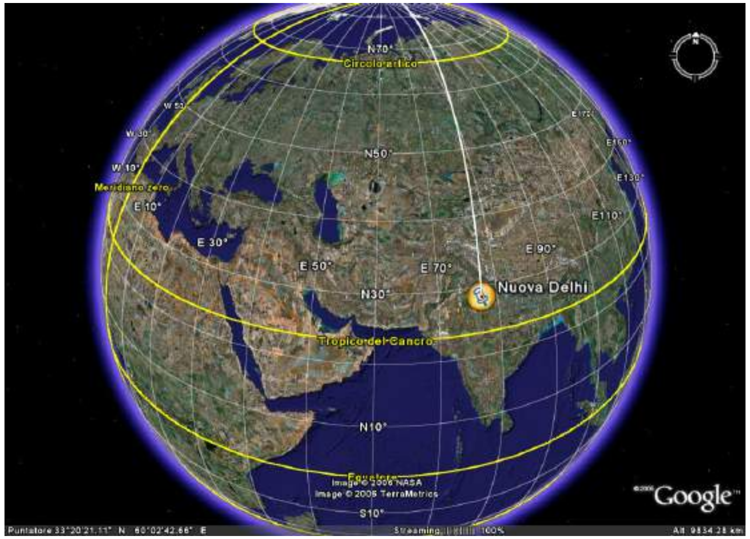
Le rette del mappamondo



Le rette del mappamondo

Le rette del mappamondo





Le rette del mappamondo

Fare geometria sul mappamondo (S^2)

Fare geometria sul mappamondo (S^2)

1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;

Fare geometria sul mappamondo (S^2)

1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;

2. Su S^2 non esistono rette parallele, perché due rette qualunque hanno sempre due punti in comune;

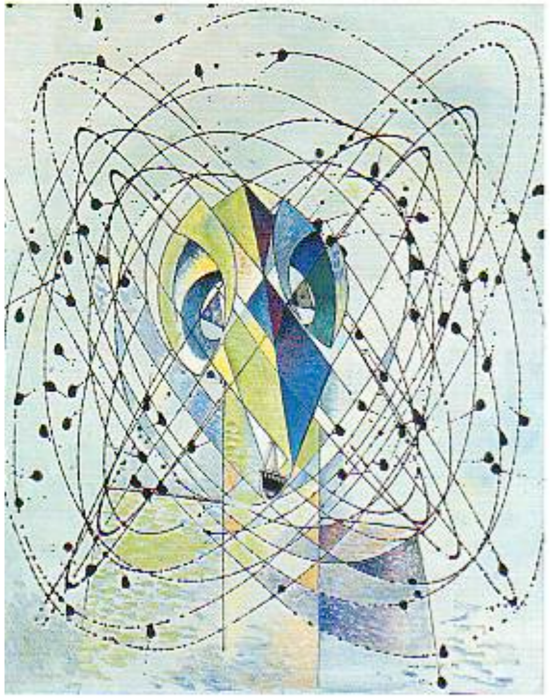
Fare geometria sul mappamondo (S^2)

1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;

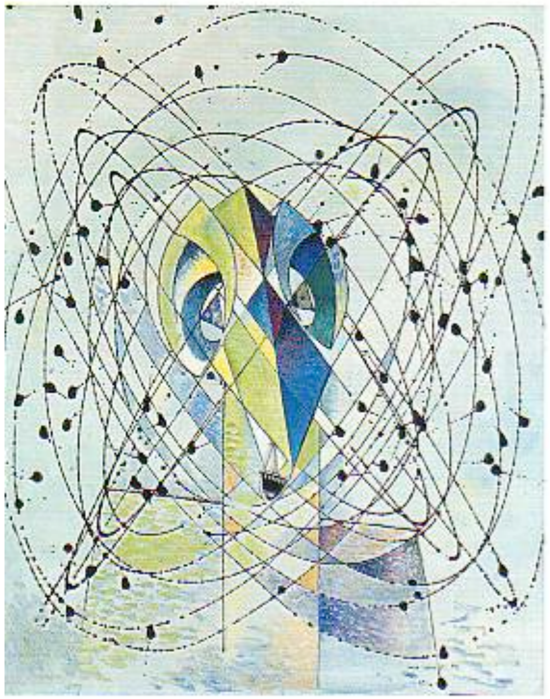
2. Su S^2 non esistono rette parallele, perché due rette qualunque hanno sempre due punti in comune;

3. Le rette di S^2 sono curve chiuse e hanno tutte la stessa lunghezza finita.

Geometria dello sputo



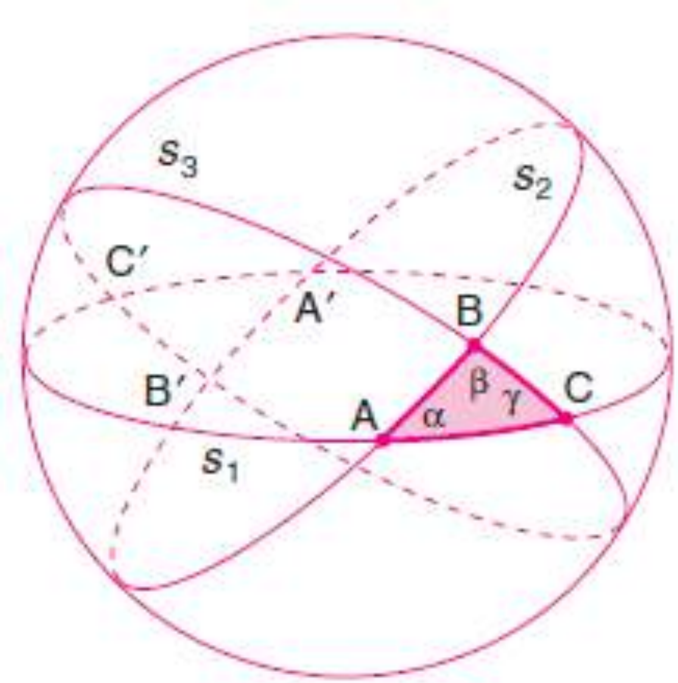
Geometria dello sputo



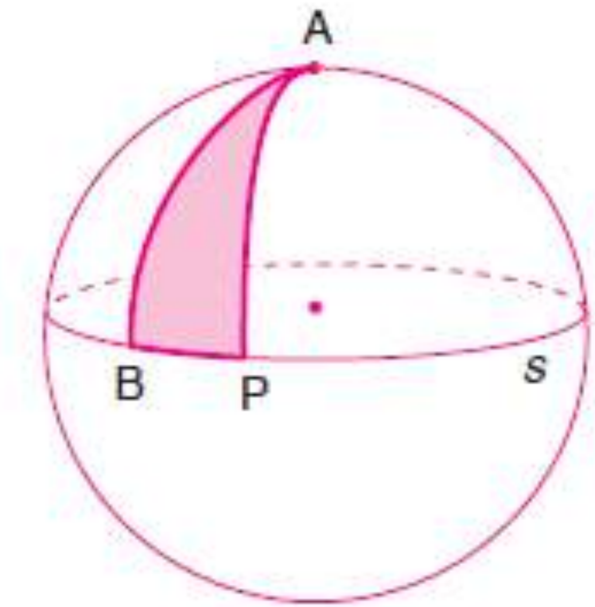
Fra le mostruosità più grandi che questo matematico minore che fu Riemann ha messo al mondo, quella di una linea perfettamente diritta e chiusa in sé è forse la più spassosa. […]
Una delle conseguenze peggiori di questa geometria è il pericolo che si corre se si sputa in linea retta davanti a sé: si rischia infatti che lo sputo vi ricada addosso!

Eugen Dühring (1833-1921)

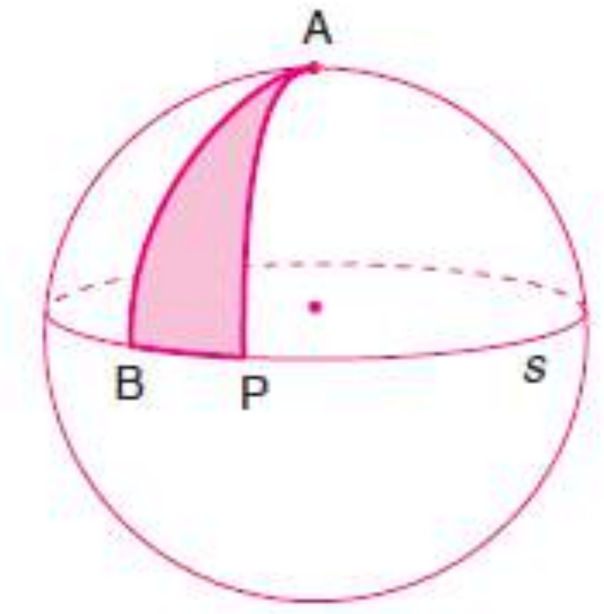
Triangoli gonfi



Triangoli gonfi



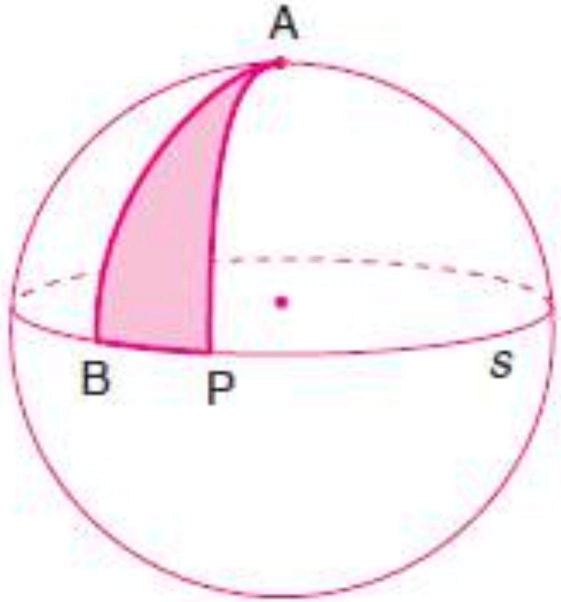
Triangoli gonfi



La somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di 180°

e

Triangoli gonfi



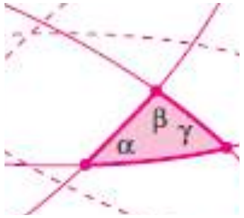
La somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di 180°

e

Tale somma non è costante, come in geometria euclidea,
ma varia al variare del triangolo

Base · altezza : 2 ???

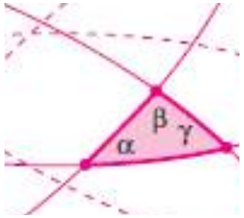
Base · altezza : 2 ???

Area (

) = α + β + γ - π

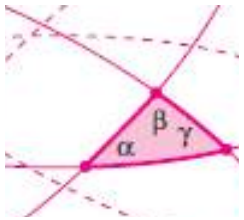
Base · altezza : 2 ???

Teorema dell'eccesso di Gauss:

Area () $= \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Niente omotetie!

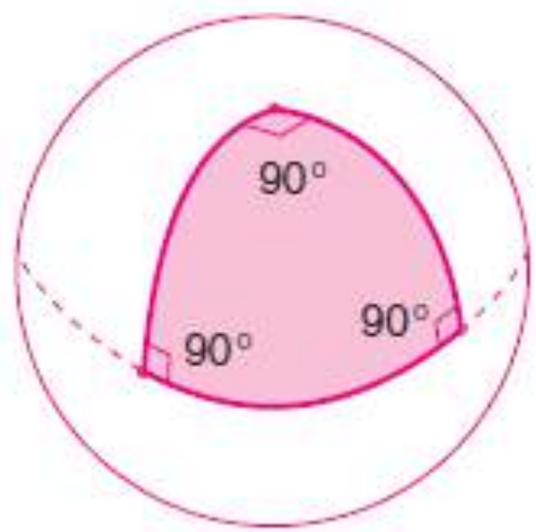
Teorema dell'eccesso di Gauss:

Area (

) $= \alpha + \beta + \gamma - \pi$

E Pitagora?

E Pitagora?



Formalizziamo?

La costruzione di *una* geometria

La costruzione di *una* geometria

La costruzione di *una* geometria

- Oggetti (termini, enti primitivi)

La costruzione di *una* geometria

- Oggetti (termini, enti primitivi)
- Regole di base (assiomi, postulati)

La costruzione di *una* geometria

- Oggetti (termini, enti primitivi)
- Regole di base (assiomi, postulati)

Geometria = tutte le affermazioni, riguardanti gli oggetti, che si possono ottenere tramite deduzioni logiche a partire dalle regole di base (proposizioni, teoremi)

Molte geometrie

Molte geometrie

Molte geometrie

- Geometria *euclidea*

Molte geometrie

- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*

Molte geometrie

- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*

Molte geometrie

- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*

Molte geometrie

- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*
- Geometria *della gomma*

Molte geometrie

- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*
- Geometria *della gomma*
- …

La matematica è un'opinione???

La matematica è un'opinione???

La domanda: la geometria euclidea è vera? Non ha assolutamente senso. Possiamo chiederci allora se il sistema metrico decimale è vero e i vecchi sistemi di pesi e misure sono falsi; se le coordinate cartesiane sono vere e quelle polari sono false.
Una geometria non può essere più vera di un'altra, può soltanto essere più comoda.

La matematica è un’opinione???

La domanda: la geometria euclidea è vera? Non ha assolutamente senso. Possiamo chiederci allora se il sistema metrico decimale è vero e i vecchi sistemi di pesi e misure sono falsi; se le coordinate cartesiane sono vere e quelle polari sono false. *Una geometria non può essere più vera di un’altra, può soltanto essere più comoda.*

«La matematica è la scienza della *libertà*:
la geometria non euclidea è nata non per misurazioni, ma sulla base della libera scelta umana di negare in maniera non distruttiva».

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti:

- Regole di base:

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,

- Regole di base:

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
  retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, …
- Regole di base:

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
  retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, …
- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
  retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, …
- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
  retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, …
- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

Dati una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*, esiste una e una sola retta passante per *P* e parallela ad *r*

Le geometrie *non euclidee*

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti:

- Regole di base:

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, …)

- Regole di base:

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, …)

- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, …)

- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, …)

- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

un postulato che neghi il V postulato euclideo

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

Dati una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*,
esiste una e una sola retta passante per *P* e parallela ad *r*

Playfair

N1

Data una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*, esiste più di una retta passante per *P* e parallela ad *r*

Dati una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*,
esiste una e una sola retta passante per *P* e parallela ad *r*

Playfair

N1

N2

Data una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*, esiste più di una retta passante per *P* e parallela ad *r*

Data una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*, non esiste nessuna retta passante per *P* e parallela ad *r*

Dati una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*, esiste una e una sola retta passante per *P* e parallela ad *r*

Playfair

N1

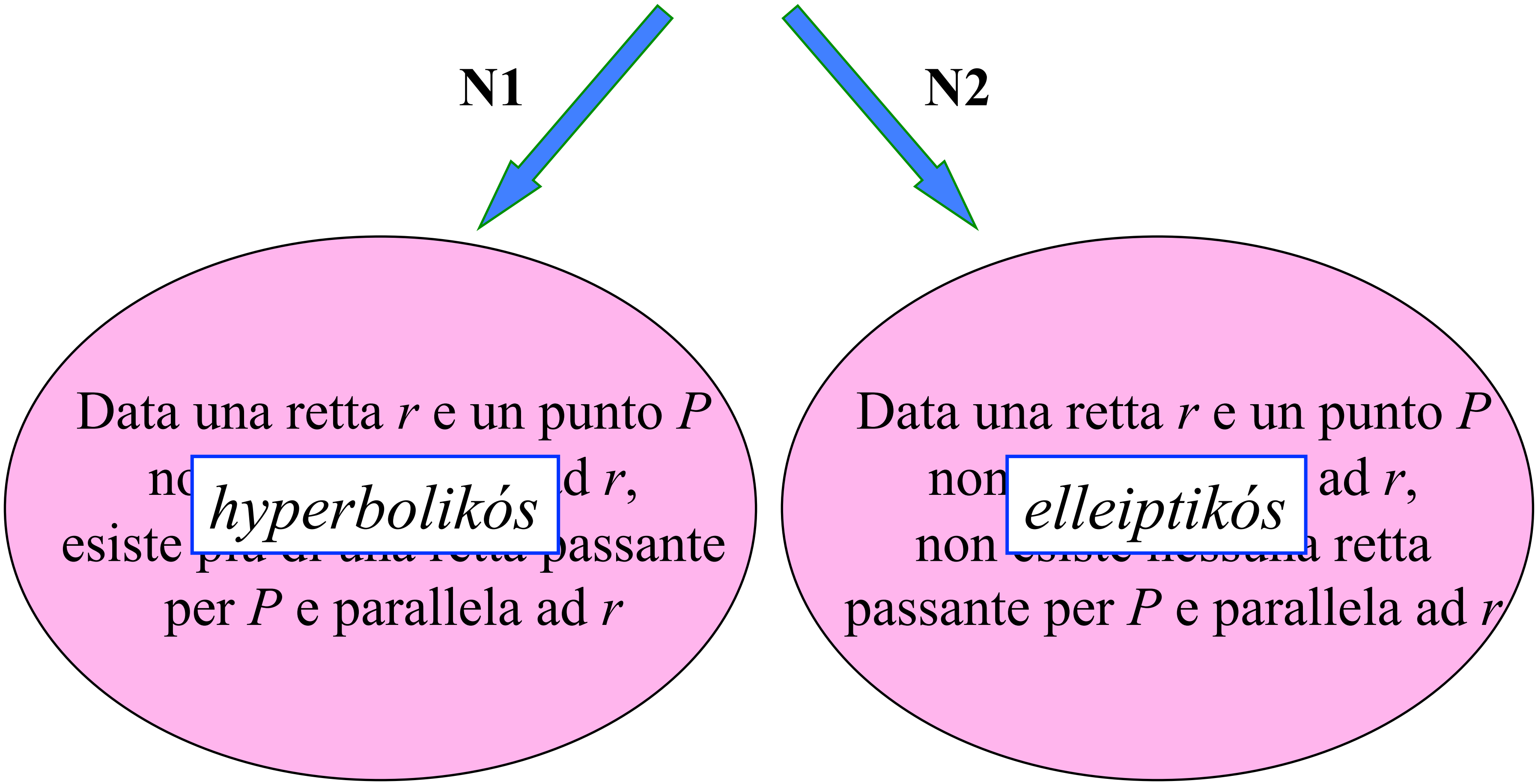
Data una retta *r* e un punto *P*
no *hyperbolikós* d *r*,
esiste [...] passante
per *P* e parallela ad *r*

N2

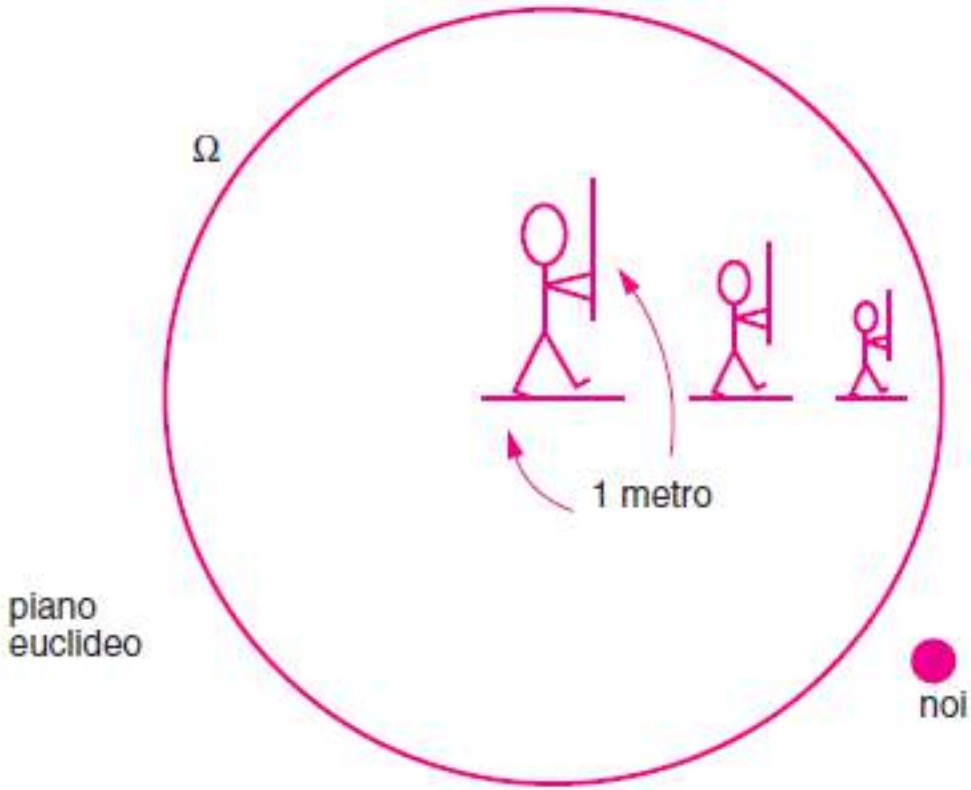
Data una retta *r* e un punto *P*
non appartenente ad *r*,
non esiste nessuna retta
passante per *P* e parallela ad *r*

Dati una retta *r* e un punto *P* non appartenente ad *r*, esiste una e una sola retta passante per *P* e parallela ad *r*

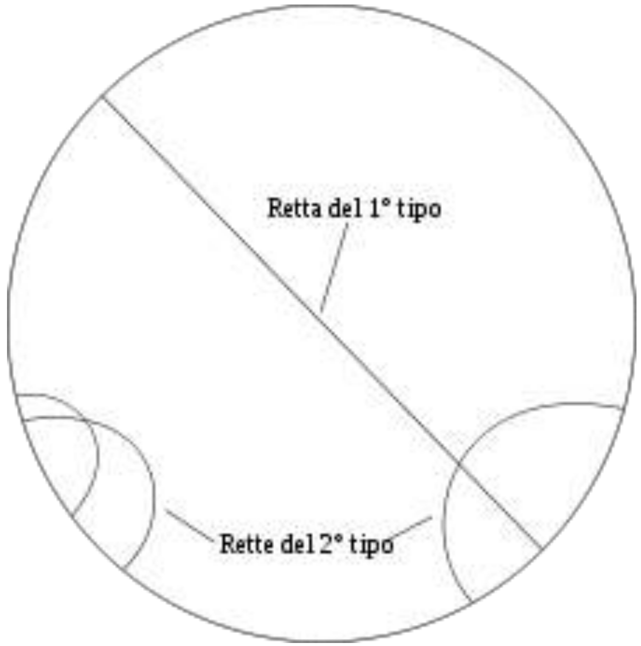
Playfair



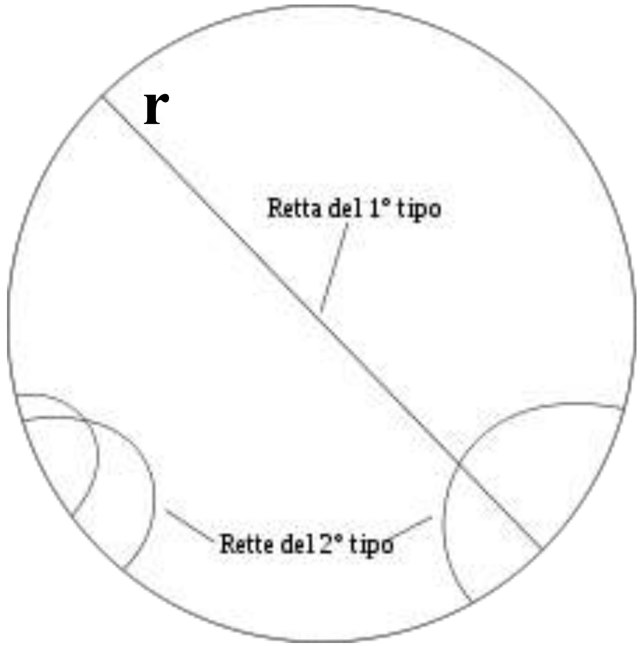
Geometria *iperbolica*: l'omino e il suo mondo di gas



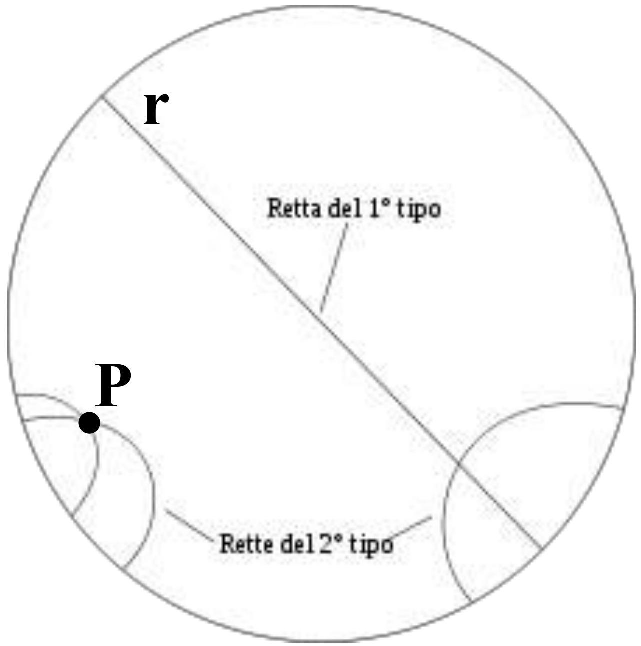
Rette iperboliche



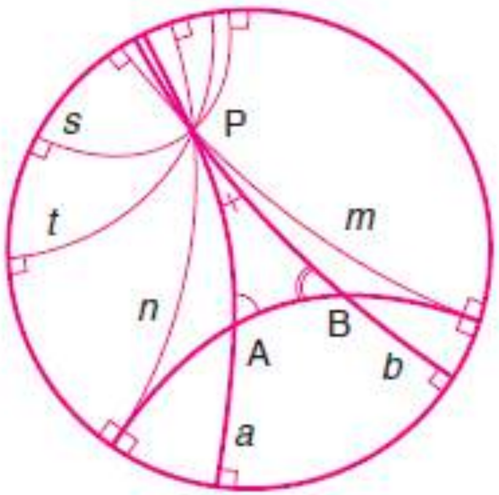
Rette iperboliche

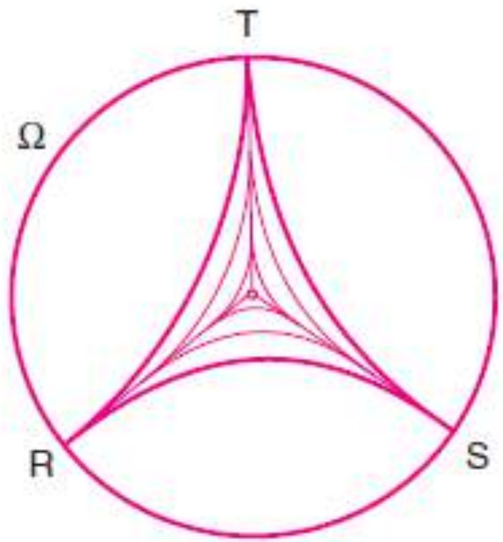


Rette iperboliche

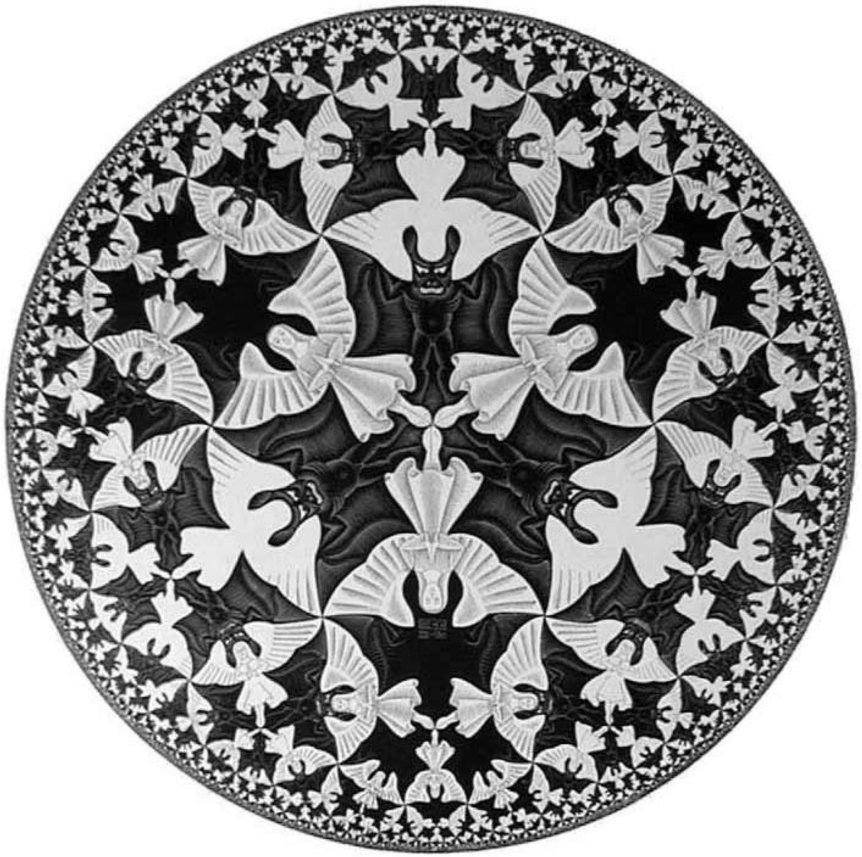


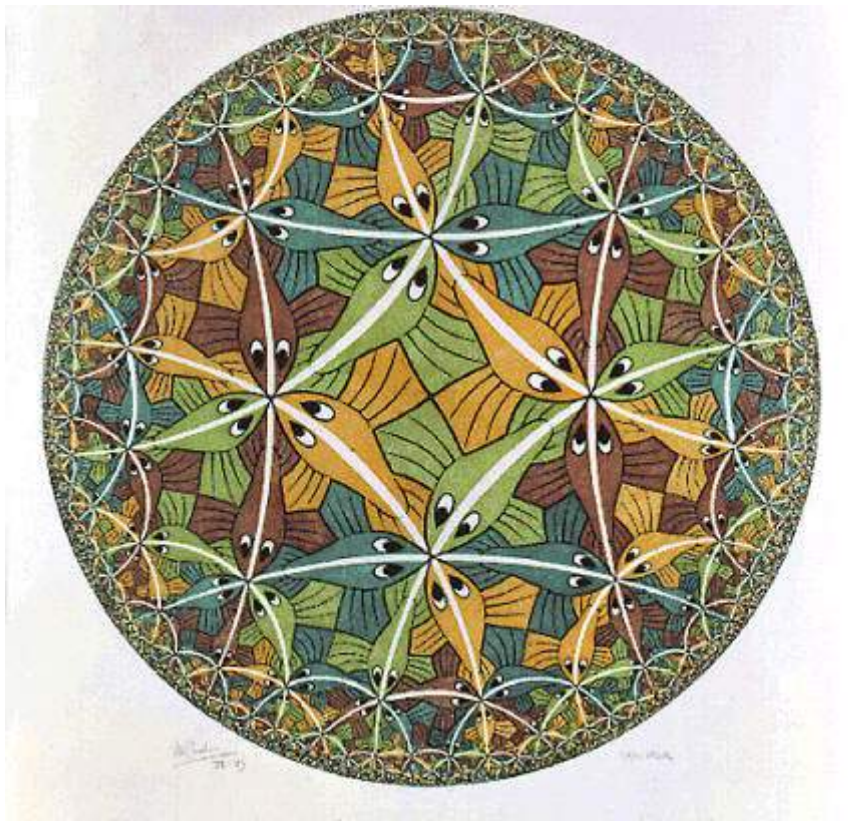
Triangoli sgonfi



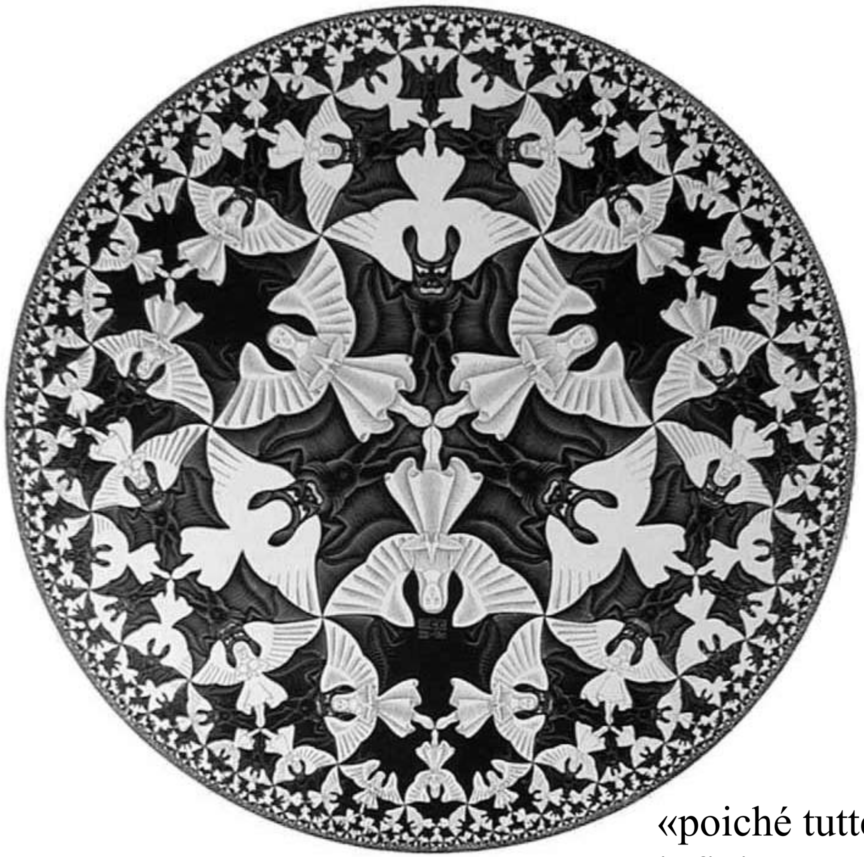


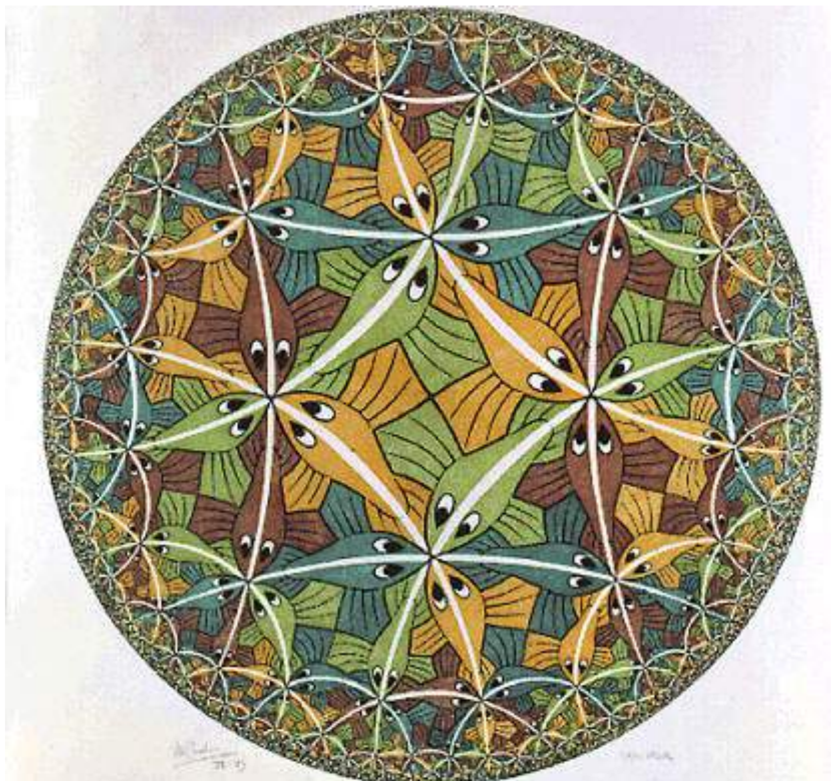
Arte iperbolica: Escher





Arte iperbolica: Escher





«poiché tutte queste sequenze di pesci balzano fuori come razzi da infinitamente lontano, perpendicolarmente al contorno, e ricadono poi da dove sono venuti, nessuno di loro raggiunge mai il bordo»

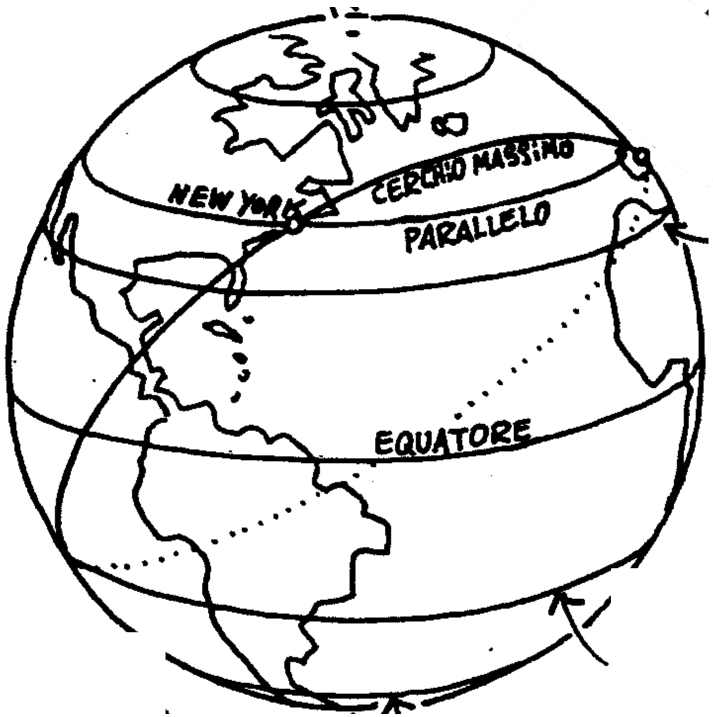
A cosa *serve* tutto ciò???

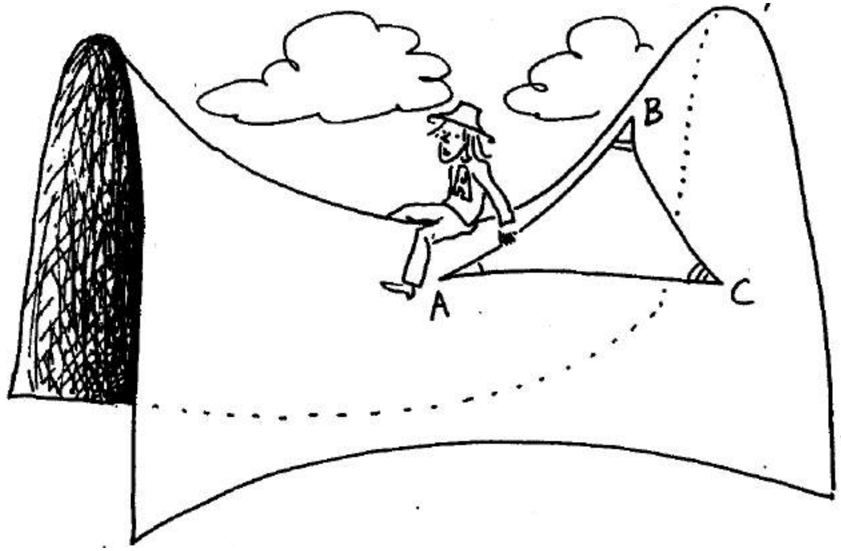
A cosa *serve* tutto ciò???

Il telescopio mentale

Problema: determinare la forma/ geometria dell'universo in cui viviamo

Fare geometria su superfici diverse dal piano: quando ci vivo dentro, mi accorgo che lo sono?

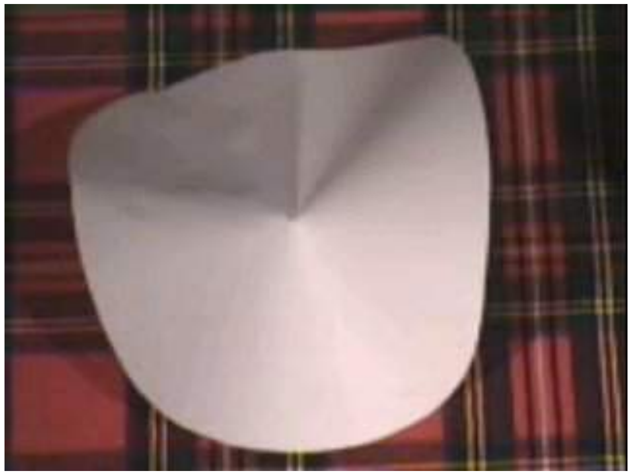




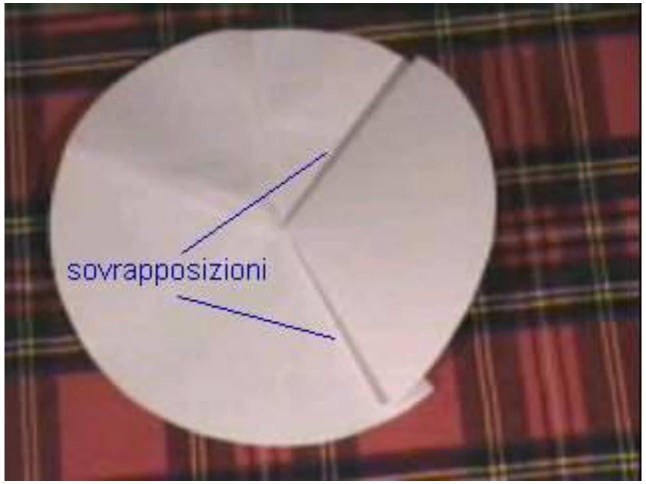
Riconoscere punti euclidei, ellittici, iperbolici

La *curvatura*, ovvero …
cosa succede quando spiaccico!

La *curvatura*, ovvero …
cosa succede quando spiaccico!



La *curvatura*, ovvero … cosa succede quando spiaccico!



Forma dell’universo: perché il problema è così difficile?

n dimensioni

obbligatorietà del
punto di vista *intrinseco*

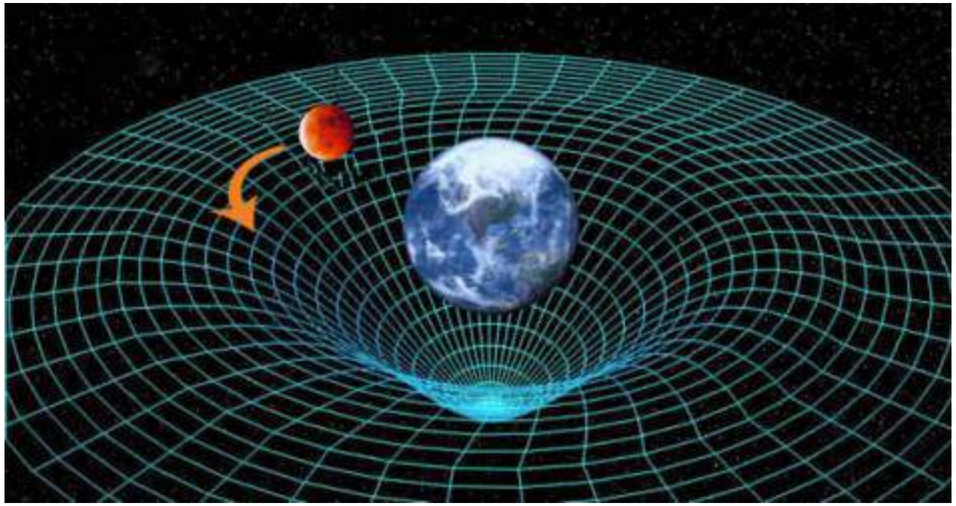
Generalizzazione del concetto di curvatura per oggetti di dimensione *n*

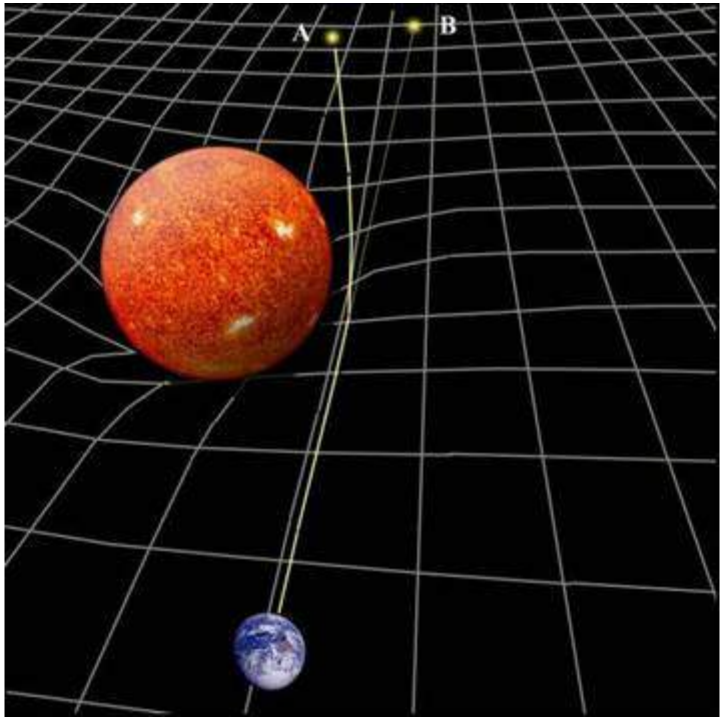
Esiste e costituisce lo spartitraffico tra 3 geometrie: *ellittica, piatta e iperbolica*

La curvatura è comunque una grandezza intrinseca

I prototipi sono tre e generalizzano quelli visti per le superfici:
S^n, E^n, H^n

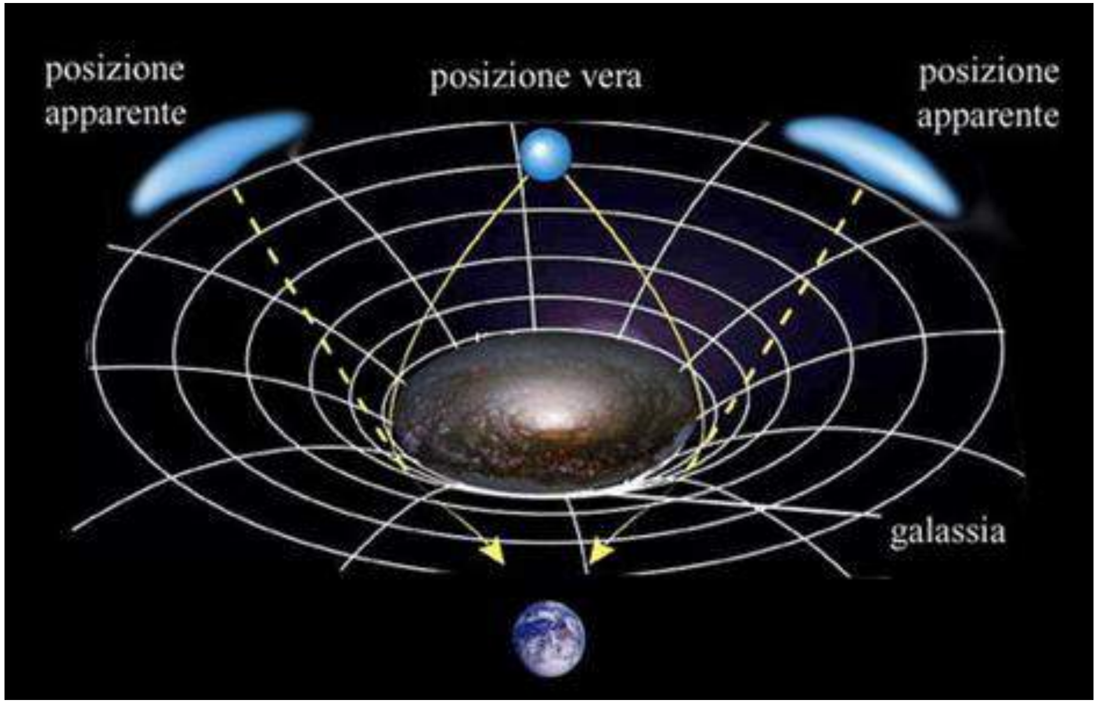
Einstein: la gravità è geometria

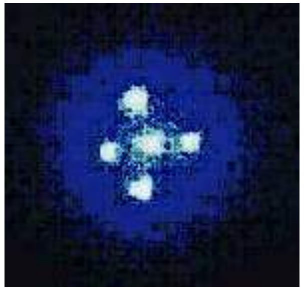




la presenza di massa ed energia
curva lo spazio

Lenti gravitazionali e croci di Einstein





Forma dell'universo a grande scala: possibili soluzioni delle equazioni della relatività generale

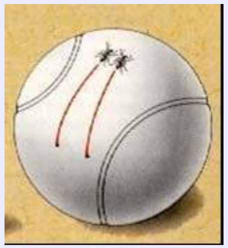
Principio cosmologico: l'universo a grande scala è *omogeneo* e *isotropo*

tensore energia - impulso = funzioni del *tensore di Ricci*

⇓

1) l'universo non è statico ma si evolve, cambiando le sue dimensioni nel tempo (contraendosi o dilatandosi);
2) la geometria dell'universo a grande scala è curva e l'usuale geometria euclidea è solo un caso particolare tra le ∞ geometrie non euclidee che si ottengono come soluzioni delle equazioni.

Densità critica, forma e destino dell'universo (con $\Lambda = 0$)

	geometria	prototipo	Destino
densità universo **=** **densità critica**	euclidea		espansione che rallenta e termina dopo un tempo infinito (cioè mai)
densità universo **<** **densità critica**	iperbolica		espansione infinita
densità universo **>** **densità critica**	ellittica		fine dell'espansione e collasso (big crunch)

Il problema dell'inventario

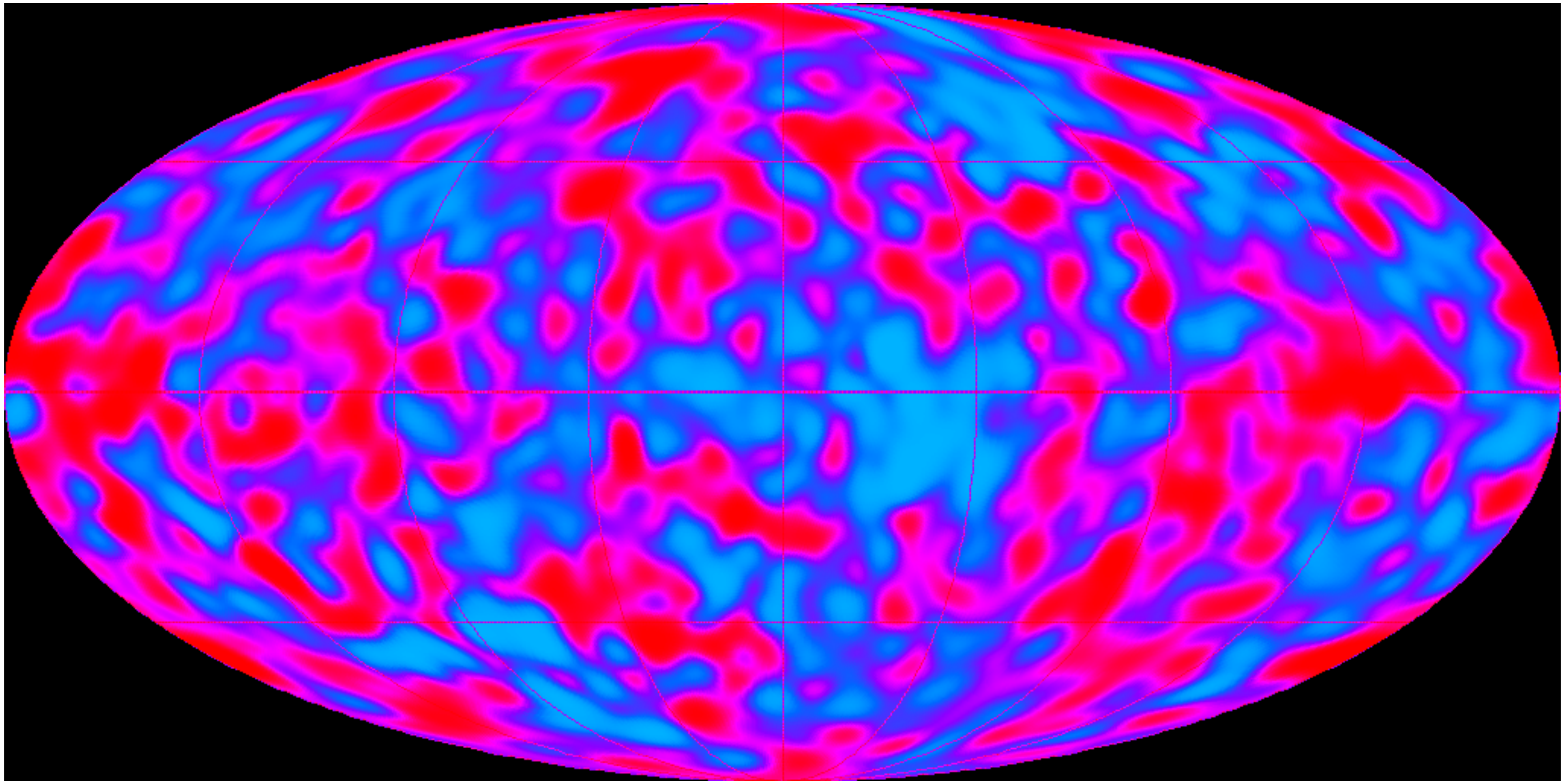
$$d_c = (1{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-29} \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Il problema dell'inventario

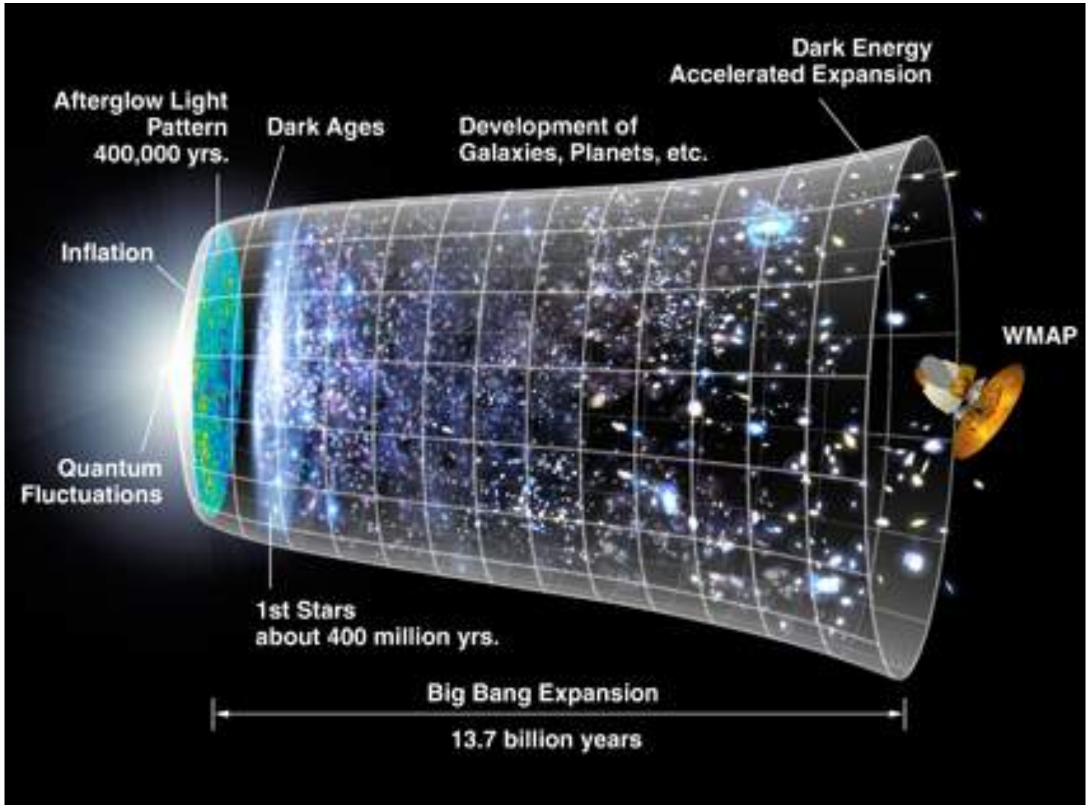
$$d_c = (1{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-29} \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Materia *oscura* Energia *oscura*

Telescopio o macchina del tempo?

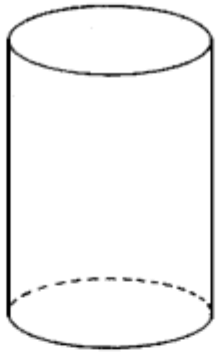


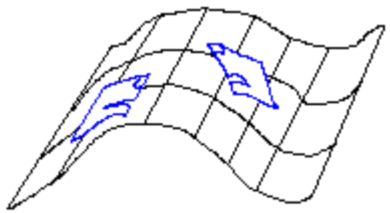
BOOMERANG, MAP e gli altri: l'universo è piatto?

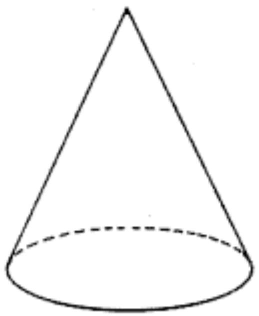


E quindi a cosa servono, in questo contesto, le geometrie non euclidee?????

È euclideo … ma che forma ha???







Dalle recenti osservazioni sperimentali …

Dalle recenti osservazioni sperimentali …

Bibliografia

GEOMETRIE NON EUCLIDEE, *Silvia Benvenuti,* Alpha test, Gli Spilli.

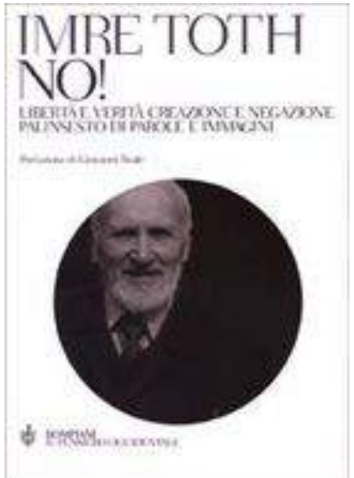
DIMENTICARE EUCLIDE?, *Silvia Benvenuti,* Linx Magazine n.08/2011, p. 16-23.

LE GNE E LA FORMA DELL'UNIVERSO, *Silvia Benvenuti*, http://linxedizioni.it/.

INSALATE DI MATEMATICA 3. SETTE VARIAZIONI SU ARTE, ARCHITETTURA E DESIGN, *Silvia Benvenuti,* Sironi.

Il TELESCOPIO MENTALE: COSA POSSIAMO DIRE SULLA FORMA DELL'UNIVERSO?, *Silvia Benvenuti*, in MaTeinItaly. Scopri la matematica del futuro, Egea, 2014.

IL GEOMETRICON, *Jean-Pierre Petit*, Dedalo.



POESIA DELL'UNIVERSO. L'ESPLORAZIONE MATEMATICA DEL COSMO, *Robert Osserman*, Tea.

THE FOURTH DIMENSION AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY IN MODERN ART, *Linda Henderson*, MIT Press.

NO! LIBERTÀ E VERITÀ, CREAZIONE E NEGAZIONE, *Imre Toth*, Bompiani.

Grazie per l'attenzione!